$x^5 + 10x^3 + 5$ の最小分解体の計算

$\omega = \zeta_5 = \exp(2\pi i/5), \psi_k = \omega^k((\sqrt{5}-1)/2)^{1/5}, \theta_k = \psi_k - 1/\psi_k$ とおく。

問題の目的は、方程式 $F(x) = x^5 + 10x^3 + 5 = 0$ の5つの根 $x_k = \psi_k - 1/\psi_k + \psi_k^3 - 1/\psi_k^3 = \theta_k^3 + 4\theta_k$ (ここで $k = 0, 1, 2, 3, 4$) の有理式を用いて、1の5乗根 ω および ψ_0, θ_0 を具体的に構成し、これらが最小分解体 $L = \mathbb{Q}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ に含まれることを示すことです。

そのことから $L = \mathbb{Q}(\omega, \psi_0)$ であることがただちに導かれる。

証明は以下のステップで構成的に行います。

ステップ 1: 根 x_k のラグランジュの分解式（フーリエ展開）

与えられた $\psi_k = \omega^k\psi_0$ を $x_k = \psi_k - \psi_k^{-1} + \psi_k^3 - \psi_k^{-3}$ に代入し、ω のべき乗で整理します。
$\omega^{-k} = \omega^{4k}$ および $\omega^{-3k} = \omega^{2k}$ であることに注意すると、

$$x_k = \omega^k\psi_0 - \omega^{2k}\psi_0^{-3} + \omega^{3k}\psi_0^3 - \omega^{4k}\psi_0^{-1}$$

と表せます。ここで、

$$y_1 = \psi_0, \quad y_2 = -\psi_0^{-3}, \quad y_3 = \psi_0^3, \quad y_4 = -\psi_0^{-1}$$

とおくと、$x_k = \sum_{j=1}^4 \omega^{jk} y_j$ という離散フーリエ逆変換の形になります。

ステップ 2: L 内の巡回対称式の構成と $\sqrt{5}$ の導出

最小分解体 L に含まれる具体的な元として、根の巡回対称和 U_m を次のように定義します。（添字は $\bmod 5$ で考えます）

$$U_m = \sum_{k=0}^4 x_k x_{k+m}^2 \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

$x_k \in L$ より、明らかに $U_m \in L$ です。

x_k のフーリエ展開を代入して U_m を展開すると、$\sum_{k=0}^4 \omega^{k(a+b+c)}$ の性質から、$a + b + c \equiv 0 \pmod 5$ となる

項のみが残ります（その際、和は 5 になります）。
該当する (a, b, c) の組とその積 $y_a y_b y_c$ を計算します。$\psi_0^5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ であることを利用すると、以下のようになります。

- $\{1, 1, 3\}$ の並べ替え（3通り）: $y_1^2 y_3 = \psi_0^5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = A$
- $\{1, 2, 2\}$ の並べ替え（3通り）: $y_1 y_2^2 = \psi_0^{-5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = B$
- $\{2, 4, 4\}$ の並べ替え（3通り）: $y_2 y_4^2 = -\psi_0^{-5} = -B$
- $\{3, 3, 4\}$ の並べ替え（3通り）: $y_3^2 y_4 = -\psi_0^5 = -A$

各項の $\omega^{m(b+c)}$ を足し合わせ整理すると、各 U_m は次のように計算されます。

$$U_m = 5\left[A(2\omega^{4m} - \omega^{2m} - \omega^m) + B(\omega^{4m} + \omega^{3m} - 2\omega^m)\right]$$

ここで $B - A = 1$ に注意して $U_2 + U_3$ を計算すると、

$$U_2 + U_3 = 5\left[A(-\sqrt{5}) + B(\sqrt{5})\right] = 5\sqrt{5}(B - A) = 5\sqrt{5}$$

となります。$U_2, U_3 \in L$ であるため、

$$\sqrt{5} = \frac{U_2 + U_3}{5} \in L$$

が導かれます。これにより、$\sqrt{5}$ は最小分解体 L に含まれます。

ステップ 3: ω が L に含まれることの証明

次に、U_m の差を計算します。$A + B = \sqrt{5}$ であることを利用して、$U_1 - U_4$ と $U_3 - U_2$ を求めると次のようになります。

$$U_1 - U_4 = 5\sqrt{5}(3\omega^4 + \omega^3 - \omega^2 - 3\omega)$$
$$U_3 - U_2 = 5\sqrt{5}(\omega^4 - 3\omega^3 + 3\omega^2 - \omega)$$

$\sqrt{5} \in L$ より、次の E_1, E_2 も L の元です。

$$E_1 = \frac{U_1 - U_4}{5\sqrt{5}} = 3\omega^4 + \omega^3 - \omega^2 - 3\omega \in L$$
$$E_2 = \frac{U_3 - U_2}{5\sqrt{5}} = \omega^4 - 3\omega^3 + 3\omega^2 - \omega \in L$$

この2つの式を組み合わせて不要な項を消去します。

$$\frac{3E_1 + E_2}{10} = \omega^4 - \omega$$

右辺の $\omega^4 - \omega$ を P とおくと、$P \in L$ です。

一方で、$\omega = \exp(2\pi i/5)$ より、$\omega^4 + \omega = \omega^{-1} + \omega = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ です。
既に $\sqrt{5} \in L$ を示しているため、$u = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in L$ です。
これらを用いると、

$$2\omega = (\omega^4 + \omega) - (\omega^4 - \omega) = u - P$$

$$\therefore \omega = \frac{u - P}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - P}{2} \in L$$

よって、ω が最小分解体 L に含まれることが示されました。

ステップ 4: ψ_0 と θ_0 が L に含まれることの証明

ラグランジュの分解式（離散フーリエ変換）を再度用います。ステップ1で求めた x_k の表式に対し、両辺に ω^{-k} を掛けて $k = 0$ から 4 まで足し合わせると、直交性（$\sum_{k=0}^{4} \omega^{ck} = 0 \ (\text{if } c \not\equiv 0 \bmod 5)$）により y_1 の項だけが残り、次を得ます。

$$\sum_{k=0}^{4} \omega^{-k} x_k = 5y_1 = 5\psi_0$$

私たちはすでに $\omega \in L$ と $x_k \in L$ を示しているので、左辺は L の元のみの演算です。したがって、

$$\psi_0 = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \omega^{-k} x_k \in L$$

が成り立ちます。

最後に、$\theta_0 = \psi_0 - \frac{1}{\psi_0}$ です。$\psi_0 \in L$ であり、L は体であるためその逆元 ψ_0^{-1} も L に含まれます。
よって、

$$\theta_0 \in L$$

も示されました。

以上により、根 x_k から ω、ψ_0、θ_0 が全て体 L 内で構成できることが証明されました。

補足: x_k が多項式 $F(x)$ の根であることの証明

与えられた x_k が多項式 $F(x) = x^5 + 10x^3 + 5$ の根であることを示すために、以下の3つのステップで証明を行います。

1. $x_k = \theta_k^3 + 4\theta_k$ の確認

まず、与えられた x_k が θ_k を用いて $x_k = \theta_k^3 + 4\theta_k$ と表せることを確認します。
$\theta_k = \psi_k - \frac{1}{\psi_k}$ であるため、その3乗を計算します。

$$\theta_k^3 = \left(\psi_k - \frac{1}{\psi_k}\right)^3 = \psi_k^3 - 3\psi_k + \frac{3}{\psi_k} - \frac{1}{\psi_k^3}$$

これを用いて $\theta_k^3 + 4\theta_k$ を計算すると以下のようになります。

$$\begin{aligned}\theta_k^3 + 4\theta_k &= \left(\psi_k^3 - 3\psi_k + \frac{3}{\psi_k} - \frac{1}{\psi_k^3}\right) + 4\left(\psi_k - \frac{1}{\psi_k}\right)\\ &= \psi_k^3 - \frac{1}{\psi_k^3} + \psi_k - \frac{1}{\psi_k}\end{aligned}$$

これは問題文で定義されている x_k の式と完全に一致します。

---

2. θ_k が満たす方程式の導出

次に、θ_k が満たす最小多項式を求めます。
恒等式 $\left(\psi - \frac{1}{\psi}\right)^5 + 5\left(\psi - \frac{1}{\psi}\right)^3 + 5\left(\psi - \frac{1}{\psi}\right) = \psi^5 - \frac{1}{\psi^5}$ を利用します（これは二項定理から展開して整理することで容易に確かめられます）。

$\psi_k = \zeta_5^k \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/5}$ の5乗を計算すると、$\zeta_5^5 = 1$ より以下のようになります。

$$\psi_k^5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

この逆数は、分母の有理化を行うと次のようになります。

$$\frac{1}{\psi_k^5} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

したがって、$\psi_k^5 - \frac{1}{\psi_k^5}$ を計算します。

$$\psi_k^5 - \frac{1}{\psi_k^5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1$$

先の恒等式に代入すると、θ_k は次の方程式を満たすことがわかります。

$$\theta_k^5 + 5\theta_k^3 + 5\theta_k = -1 \implies \theta_k^5 = -5\theta_k^3 - 5\theta_k - 1$$

---

3. $F(x_k) = 0$ の証明

最後に、$x_k = \theta_k^3 + 4\theta_k$ が $F(x) = x^5 + 10x^3 + 5 = 0$ を満たすことを示します。
計算を簡潔にするため、添字 k を省略し $x = \theta^3 + 4\theta$ とします。次数を下げるために $\theta^5 = -5\theta^3 - 5\theta - 1$ を繰り返し用いて x^3 と x^5 を θ の4次以下の多項式として表します。

まず、高次の θ を前もって計算しておきます。

- $\theta^6 = \theta(-5\theta^3 - 5\theta - 1) = -5\theta^4 - 5\theta^2 - \theta$
- $\theta^7 = \theta(-5\theta^4 - 5\theta^2 - \theta) = -5\theta^5 - 5\theta^3 - \theta^2 = -5(-5\theta^3 - 5\theta - 1) - 5\theta^3 - \theta^2 = 20\theta^3 - \theta^2 + 25\theta + 5$

x^2 の計算:

$$x^2 = (\theta^3 + 4\theta)^2 = \theta^6 + 8\theta^4 + 16\theta^2$$

θ^6 を代入して整理します。

$$x^2 = (-5\theta^4 - 5\theta^2 - \theta) + 8\theta^4 + 16\theta^2 = 3\theta^4 + 11\theta^2 - \theta$$

x^4 の計算:

$$\begin{aligned} x^3 &= x \cdot x^2 = (\theta^3 + 4\theta)(3\theta^4 + 11\theta^2 - \theta) \\ &= 3\theta^7 + 11\theta^5 - \theta^4 + 12\theta^5 + 44\theta^3 - 4\theta^2 \\ &= 3\theta^7 + 23\theta^5 - \theta^4 + 44\theta^3 - 4\theta^2 \end{aligned}$$

θ^7 と θ^5 を代入します。

$$\begin{aligned} x^3 &= 3(20\theta^3 - \theta^2 + 25\theta + 5) + 23(-5\theta^3 - 5\theta - 1) - \theta^4 + 44\theta^3 - 4\theta^2 \\ &= 60\theta^3 - 3\theta^2 + 75\theta + 15 - 115\theta^3 - 115\theta - 23 - \theta^4 + 44\theta^3 - 4\theta^2 \\ &= -\theta^4 - 11\theta^3 - 7\theta^2 - 40\theta - 8 \end{aligned}$$

x^4 の計算:

$$\begin{aligned} x^4 &= x \cdot x^3 = (\theta^3 + 4\theta)(-\theta^4 - 11\theta^3 - 7\theta^2 - 40\theta - 8) \\ &= -\theta^7 - 11\theta^6 - 11\theta^5 - 84\theta^4 - 36\theta^3 - 160\theta^2 - 32\theta \end{aligned}$$

再度 $\theta^7, \theta^6, \theta^5$ を代入して整理すると以下のようになります。

$$x^4 = -29\theta^4 - \theta^3 - 104\theta^2 + 9\theta + 6$$

x^5 の計算:

$$\begin{aligned} x^5 &= x \cdot x^4 = (\theta^3 + 4\theta)(-29\theta^4 - \theta^3 - 104\theta^2 + 9\theta + 6) \\ &= -29\theta^7 - \theta^6 - 220\theta^5 + 5\theta^4 - 410\theta^3 + 36\theta^2 + 24\theta \end{aligned}$$

同様に $\theta^7, \theta^6, \theta^5$ を代入します。

$$\begin{aligned} x^5 &= -29(20\theta^3 - \theta^2 + 25\theta + 5) - (-5\theta^4 - 5\theta^2 - \theta) - 220(-5\theta^3 - 5\theta - 1) + 5\theta^4 - 410\theta^3 + 36\theta^2 + 24\theta \\ &= 10\theta^4 + 110\theta^3 + 70\theta^2 + 400\theta + 75 \end{aligned}$$

$x^5 + 10x^3 + 5$ **への代入:**

求めた x^5 と $10x^3$ を足し合わせます。

- $x^5 = 10\theta^4 + 110\theta^3 + 70\theta^2 + 400\theta + 75$
- $10x^3 = 10(-\theta^4 - 11\theta^3 - 7\theta^2 - 40\theta - 8) = -10\theta^4 - 110\theta^3 - 70\theta^2 - 400\theta - 80$

$$x^5 + 10x^3 + 5 = (10 - 10)\theta^4 + (110 - 110)\theta^3 + (70 - 70)\theta^2 + (400 - 400)\theta + (75 - 80 + 5) = 0$$

すべての項が完全に相殺され、$F(x_k) = 0$ となることが証明されました。
$k = 0, 1, 2, 3, 4$ のそれぞれに対して ψ_k は異なる値をとるため、x_k は $F(x) = 0$ の5つの根をすべて表しています。